



ce
pre
UNI

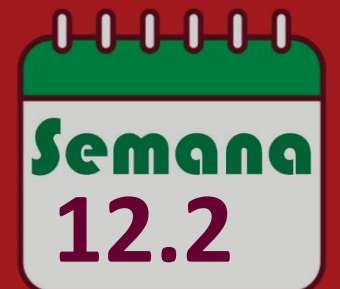
CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA

**función logaritmo.
Ecuaciones e inecuaciones**



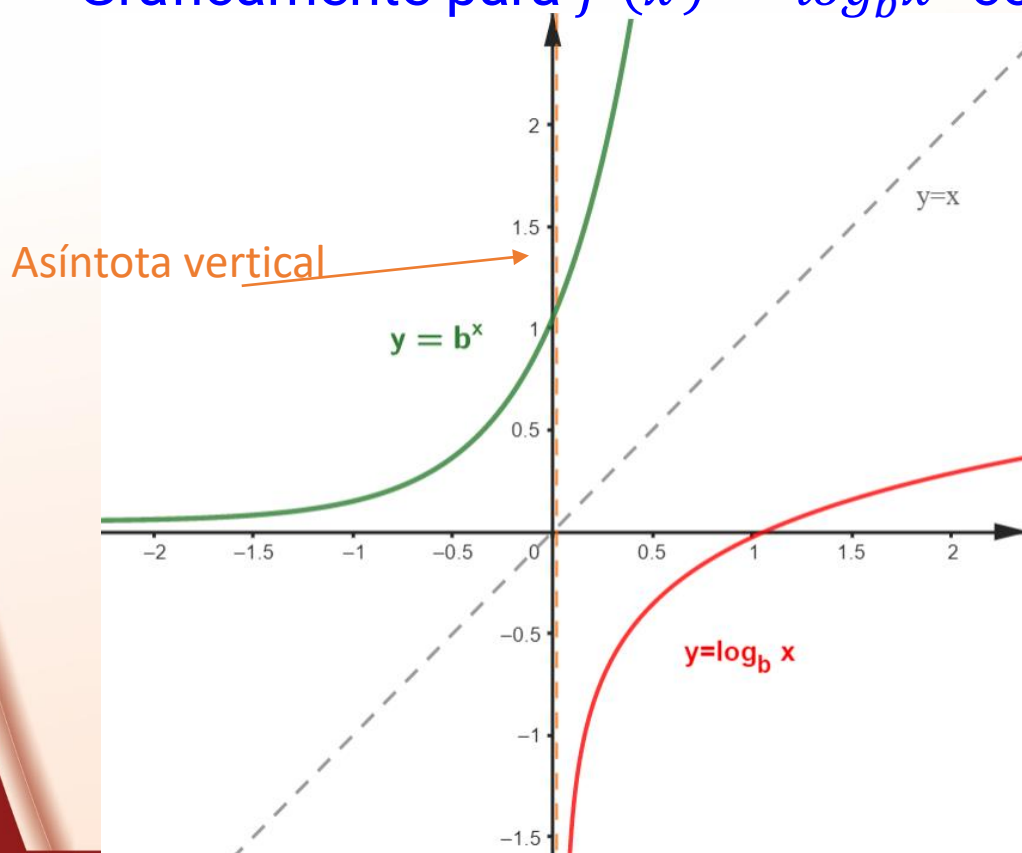
Función Logaritmo

Definición

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, definimos la función logaritmo en base b como

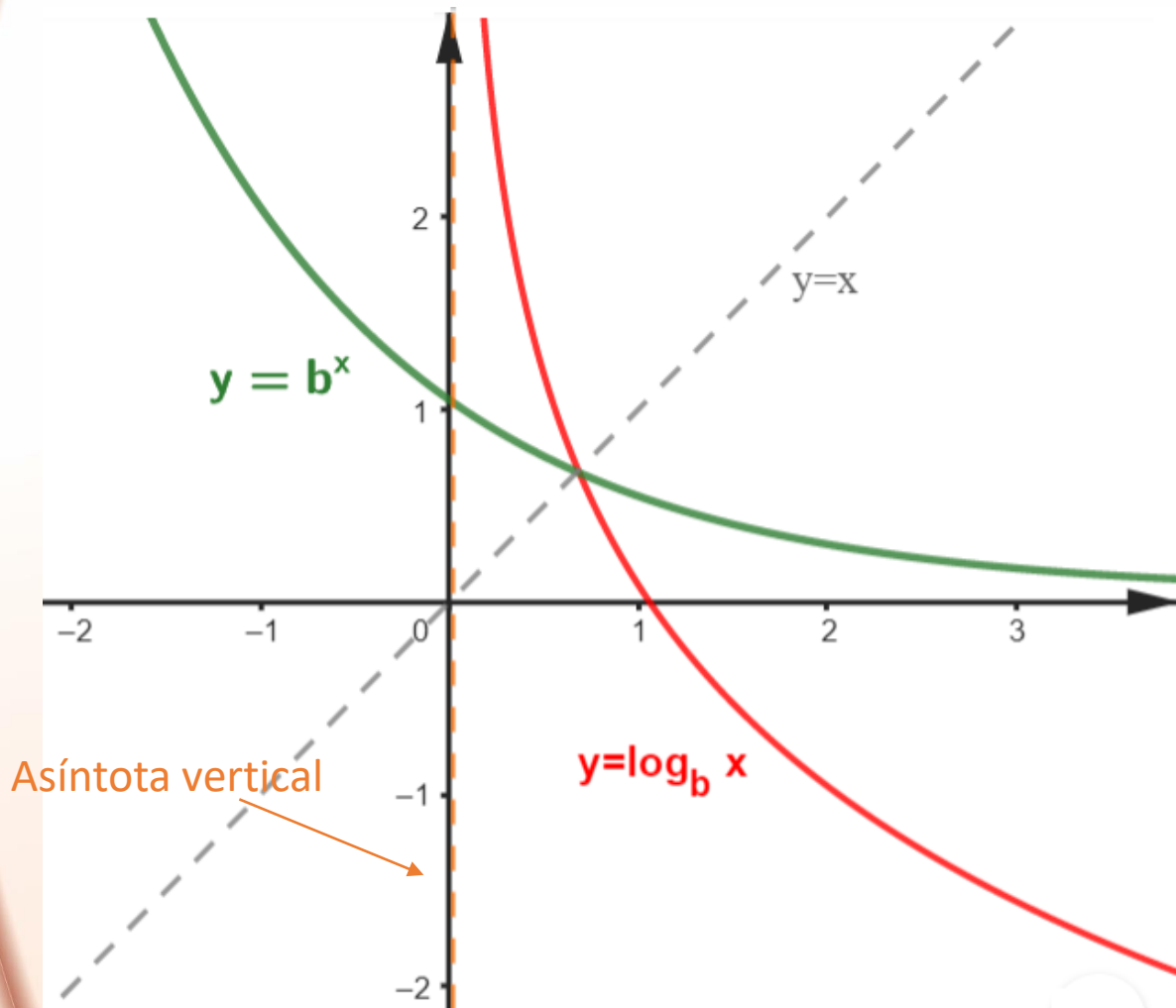
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } y = f(x) = \log_b x, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Gráficamente para $f(x) = \log_b x$ con $b > 1$, tendremos:



1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ y $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$
2. La gráfica no intersecta el eje y .
3. La gráfica de f interseca al eje x en el punto $(1, 0)$.
4. La función es Creciente.
5. La función es biyectiva.
6. No tiene máximo ni mínimo valor.

Gráficamente para $f(x) = \log_b x$ con $0 < b < 1$ tendremos:



1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ y $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$
2. La gráfica no intersecta el eje y.
3. La gráfica de f interseca al eje x en el punto $(1, 0)$.
4. La función es decreciente.
5. La función es biyectiva.
6. No tiene máximo ni mínimo valor.

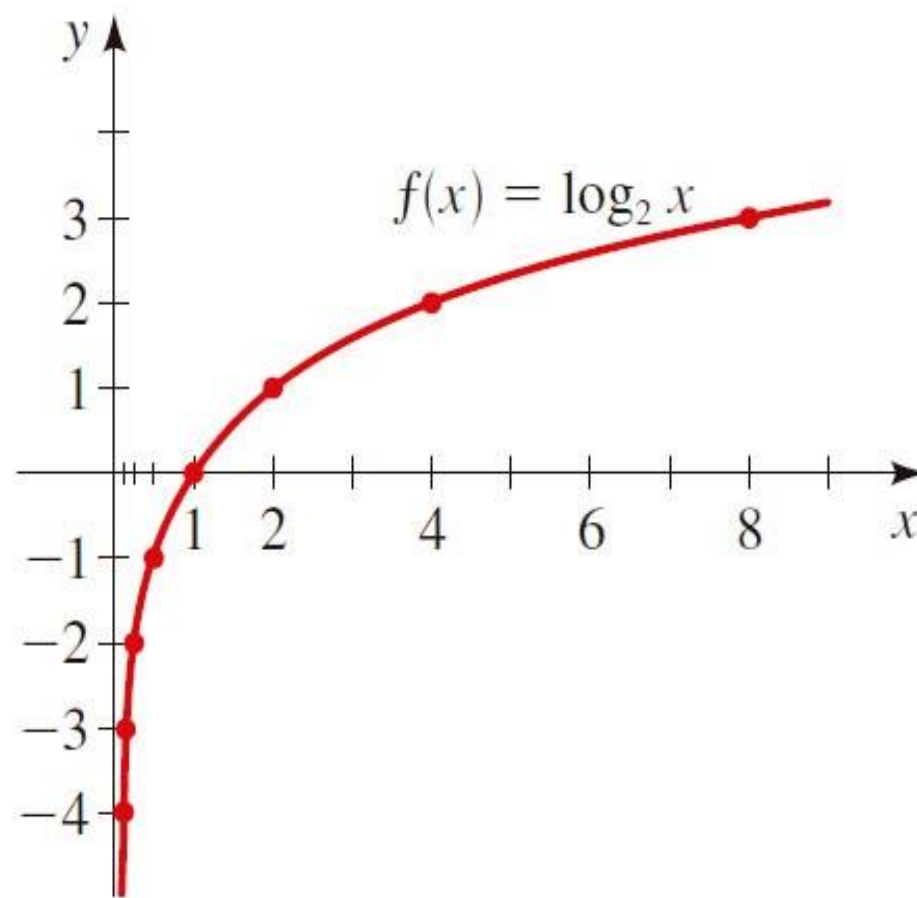
Ejemplo

Grafique la función $f(x) = \log_2 x$

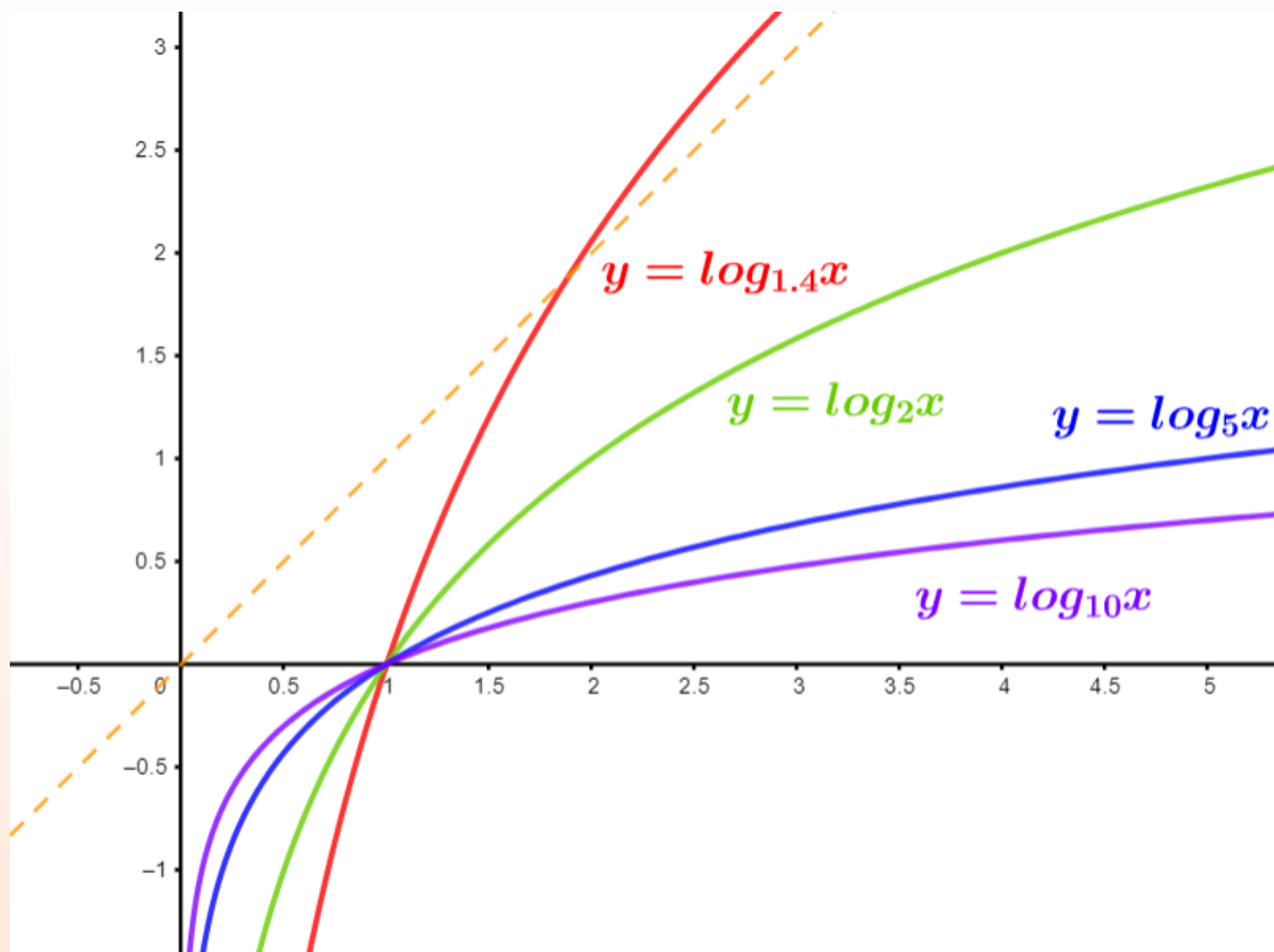
Solución

Tabulando valores obtenemos:

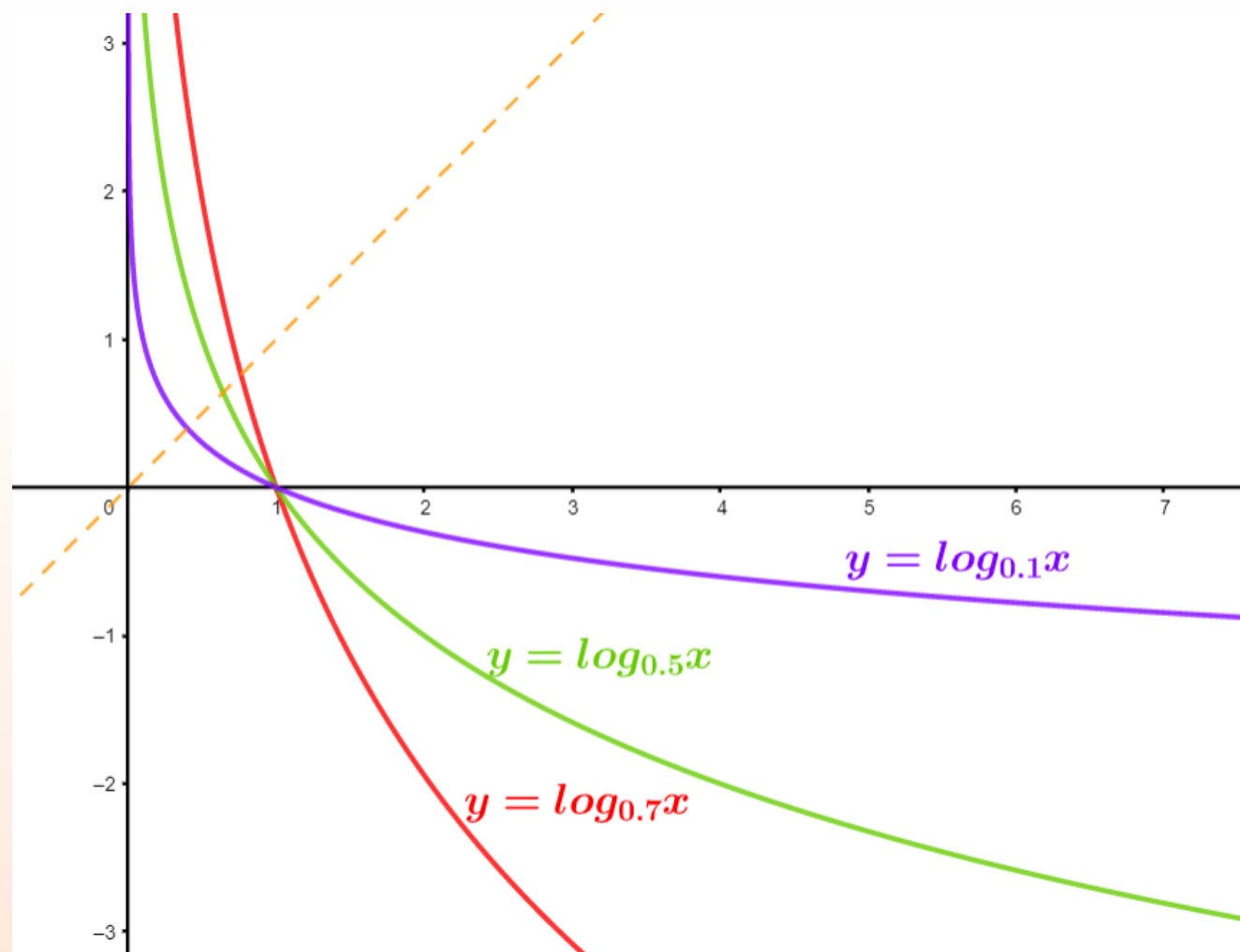
x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4



De manera similar al tabular valores a otras funciones logarítmicas con **base mayor a uno**, obtendremos:



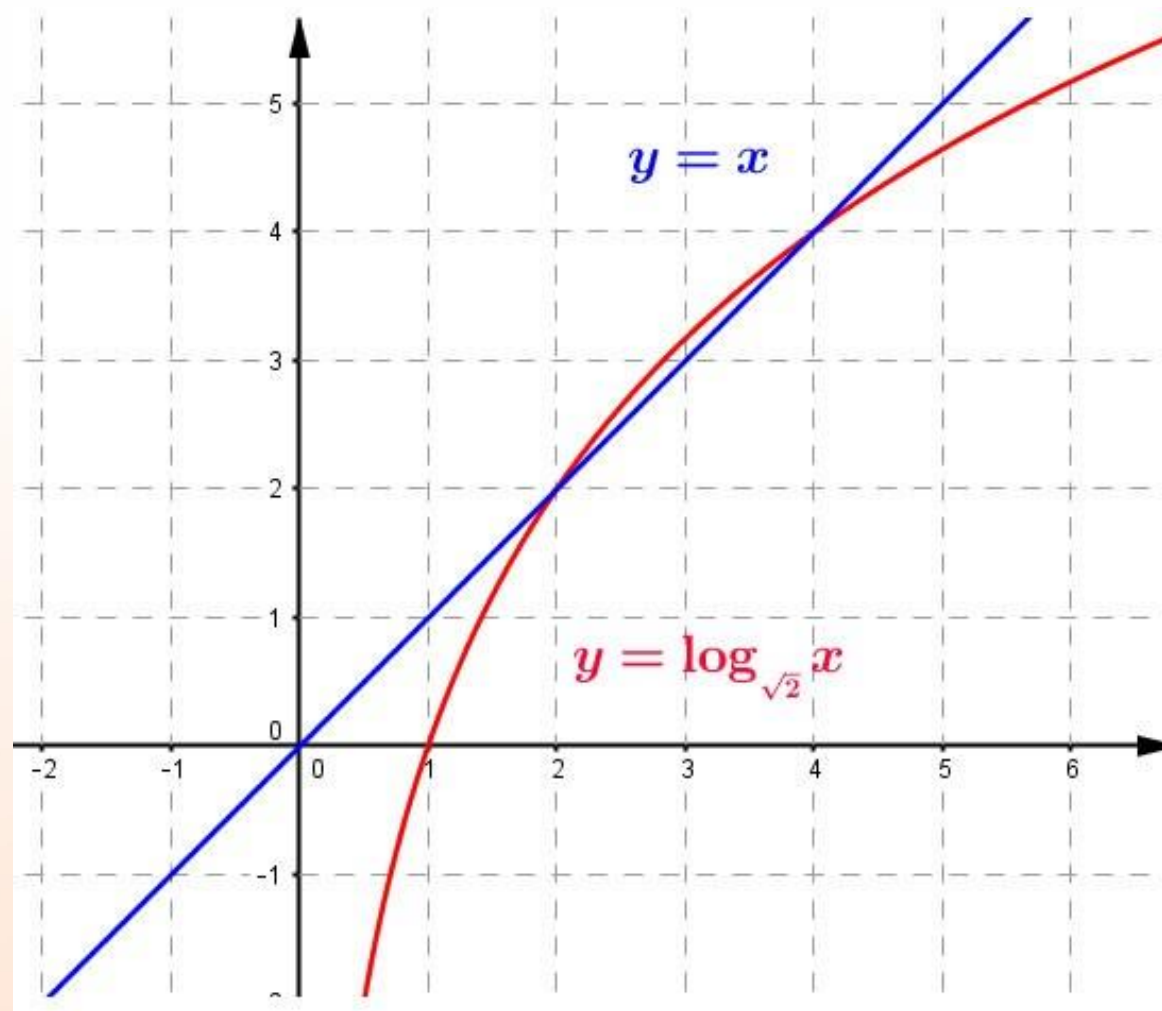
De manera similar al tabular valores a otras funciones logarítmicas con **base positiva menor a uno**, obtendremos:



<https://www.geogebra.org/m/WJHTBKFb>

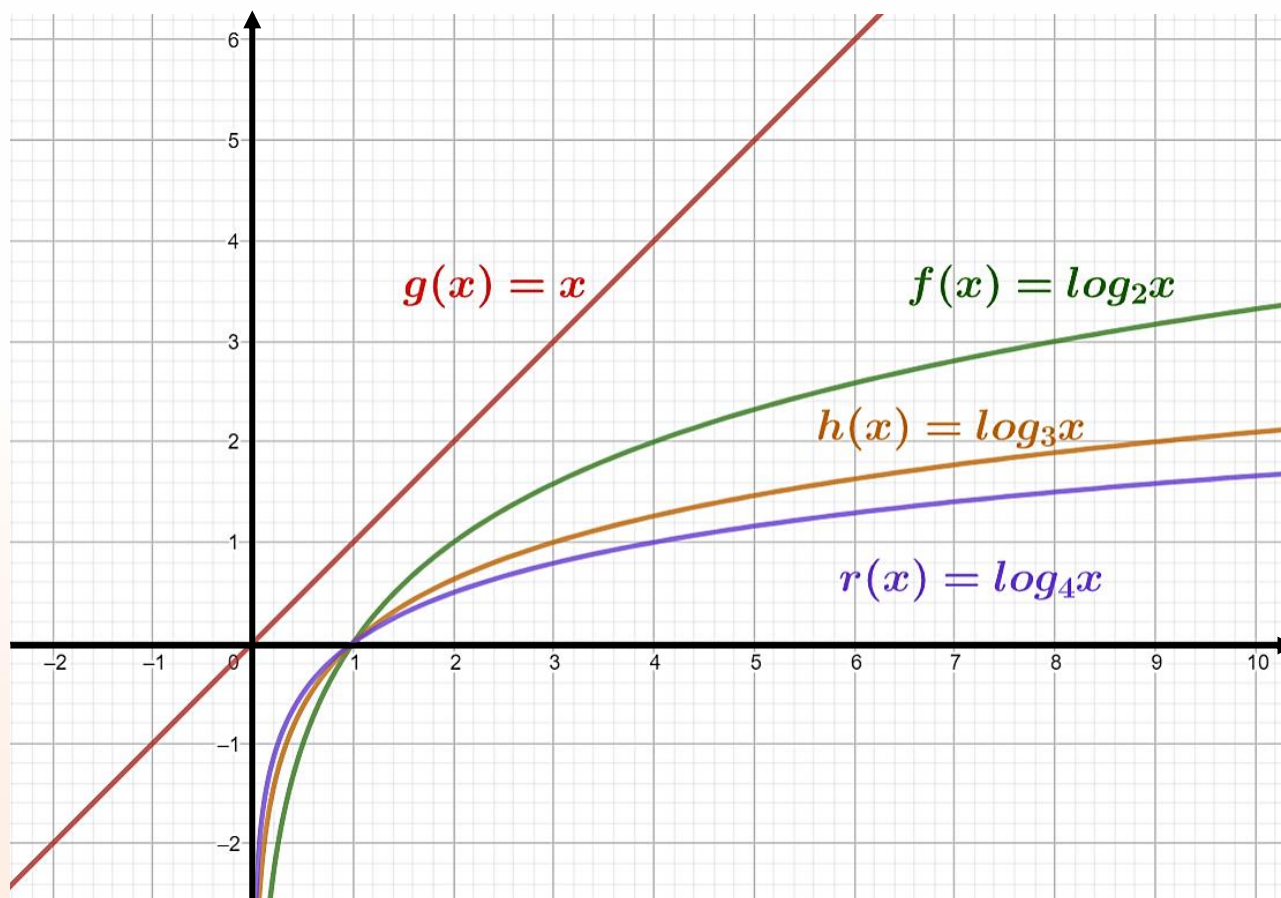
Ejemplo

Grafique en un mismo plano las funciones $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ y $g(x) = x$



Nota.-

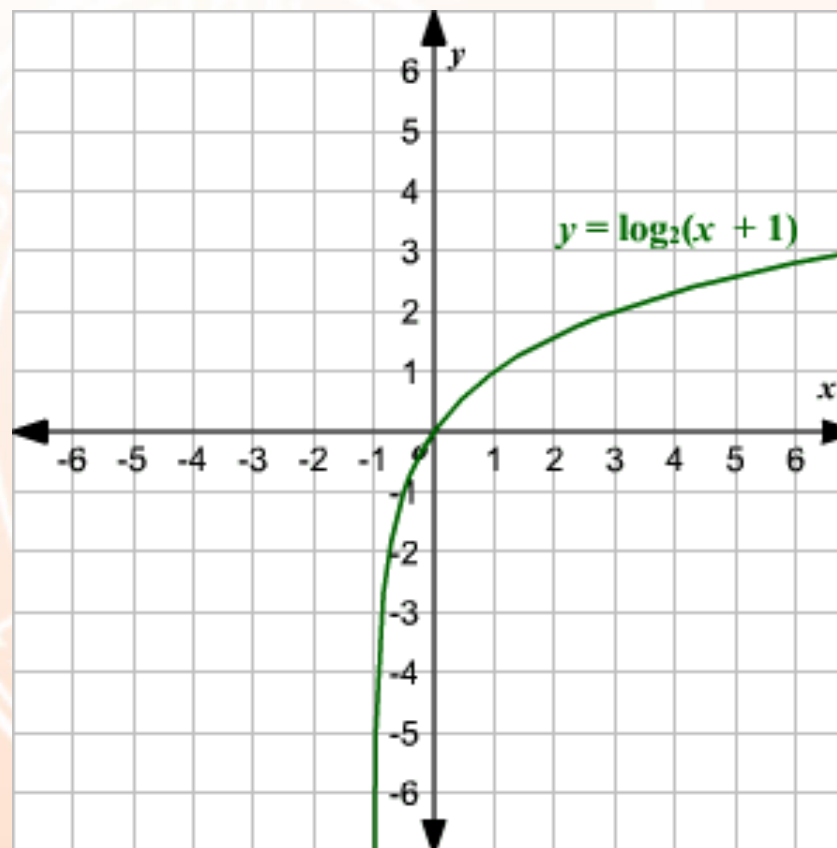
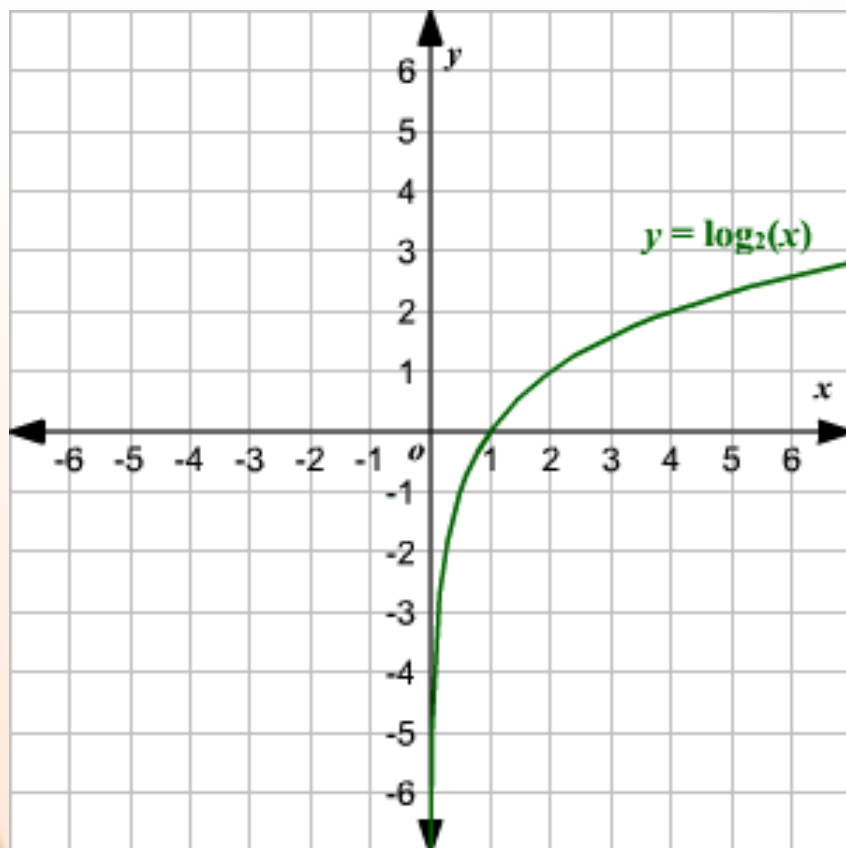
Si $b \geq 2$ la gráfica de $f(x) = \log_b x$ no interseca la gráfica de $g(x) = x$.



Propiedades (Gráficas Logarítmicas)

Considerando conocida la gráfica de $f(x) = \log_2 x$, podemos obtener:

- $g(x) = \log_2(x + 1) = f(x + 1)$, la cual es la gráfica de f desplazada una unidad a la izquierda.
- $h(x) = \log_2(x + 1) - 3 = f(x + 1) - 3$, la cual es la gráfica de f desplazada una unidad a la izquierda y tres hacia abajo.



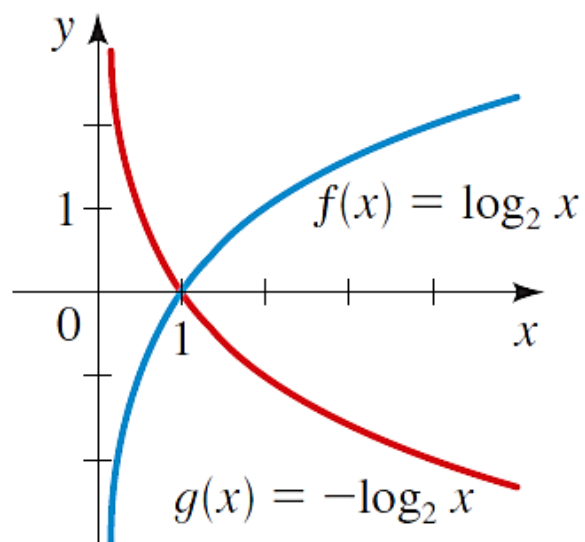
Ejemplo

Trace las gráficas de

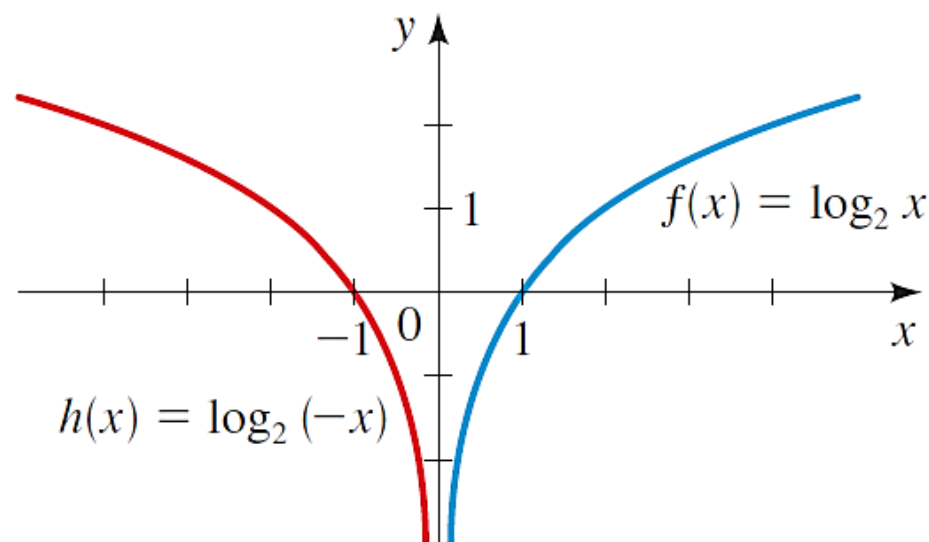
- a) $g(x) = -\log_2 x$
- b) $h(x) = \log_2(-x)$

Solución

- (a) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$
- (b) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$



(a)



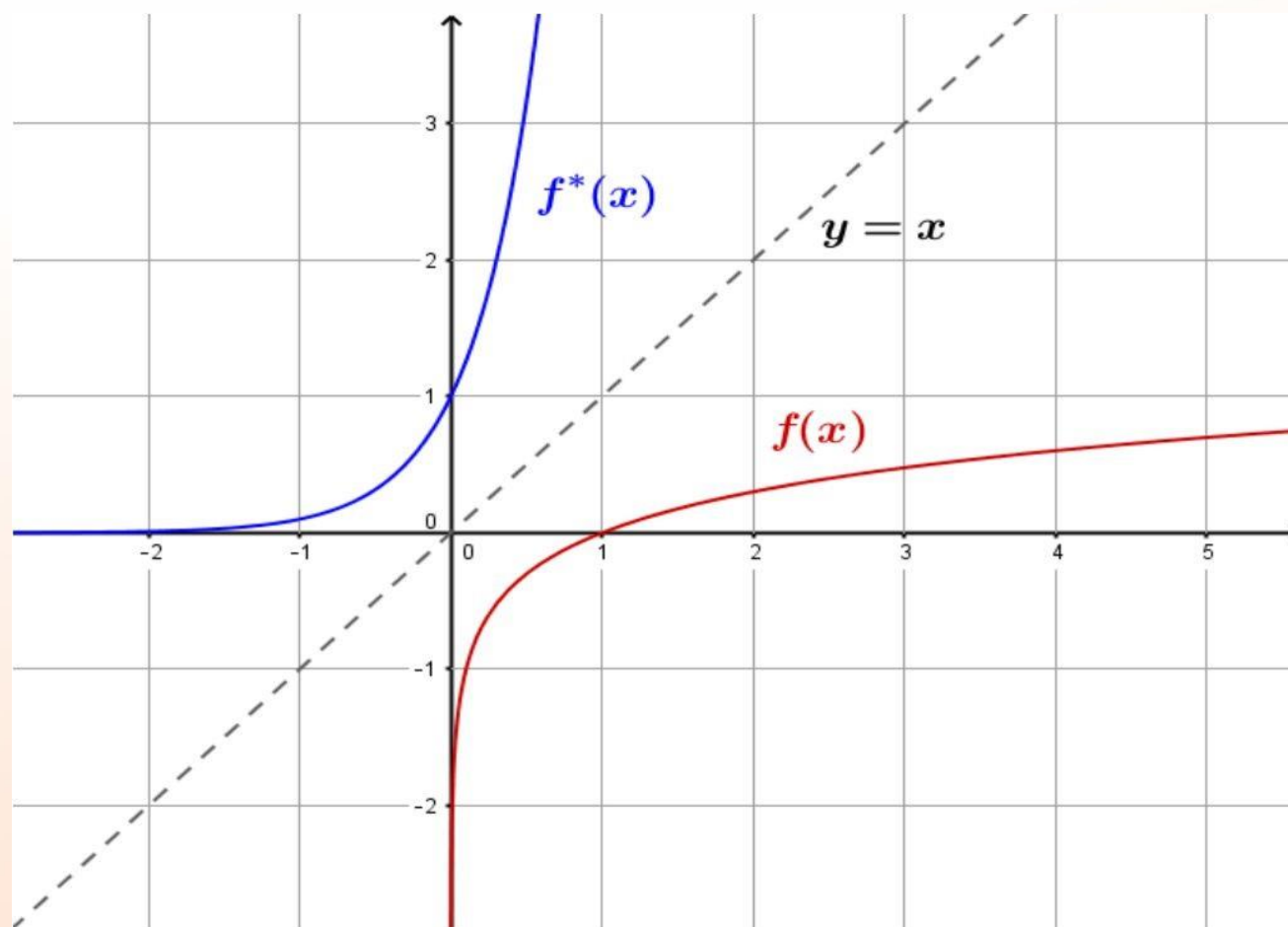
(b)

Inversa de la función logaritmo

Dado $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ tendremos:

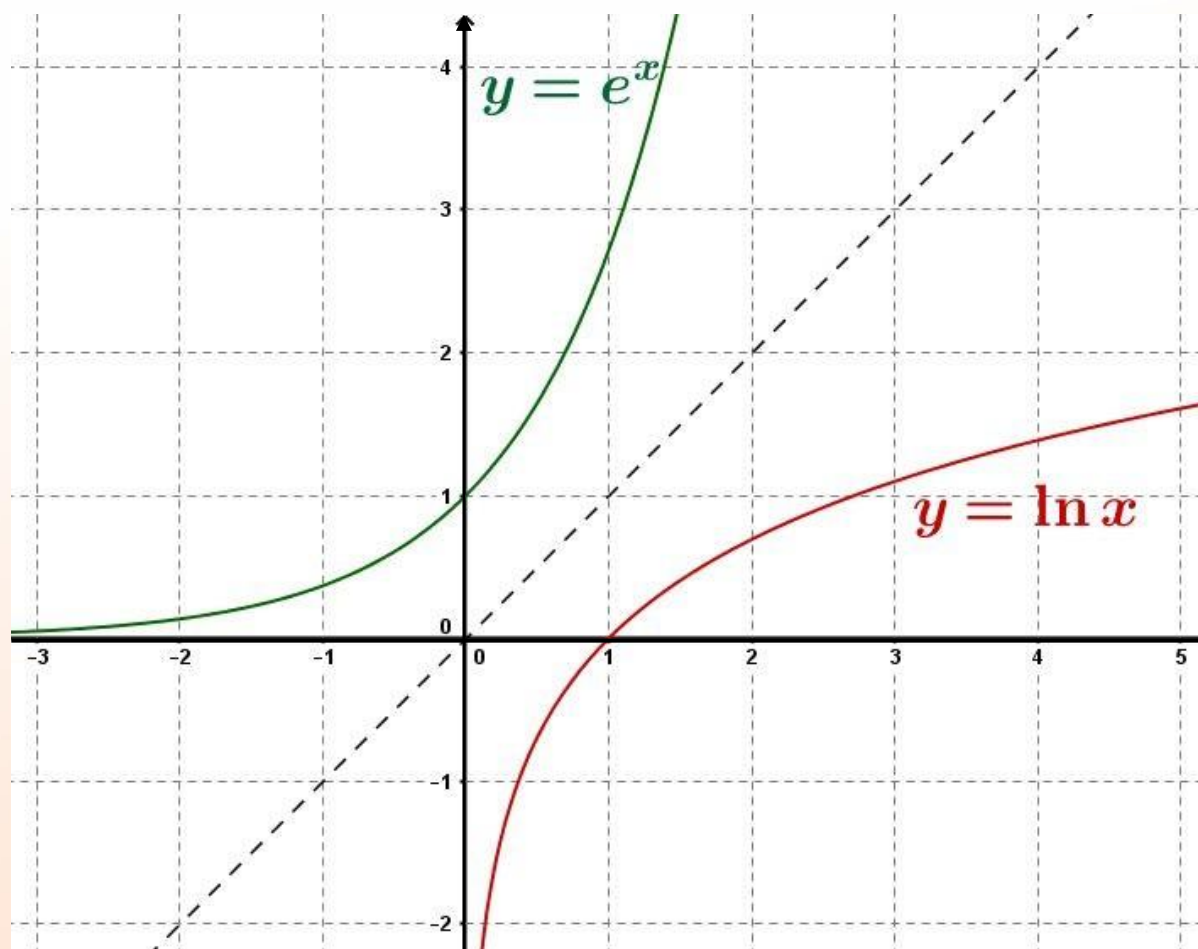
$$y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

O de forma equivalente $f(x) = \log_b x \Leftrightarrow f^*(x) = b^x$



La función logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$.

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$



Ejemplo

Halle la inversa de la función $f(x) = \log(|x - 1|)$ siendo $2 \leq x \leq 11$.

Solución

1.- Hallando el dominio de f^* :

Mediante el rango de f , obtenemos $\text{Dom } f^* = [0,1]$

2.- Hallando la regla de correspondencia de f^* :

Despejando x del dato:

$$f(x) = \log(x - 1)$$

$$10^{f(x)} = x - 1$$

$$x = 10^{f(x)} + 1$$

Reemplazando x por $f^*(x)$ y $f(x)$ por x obtenemos

$$f^*(x) = 10^x + 1$$

Luego diremos que $f^*(x) = 10^x + 1$, con $x \in [0,1]$

Ecuación exponencial

Es aquella ecuación donde la variable se encuentra en el exponente.

Ejemplos

$$1) 2^{x+1} + 3^x = 7$$

$$2) e^x - 2^x = 0$$

$$3) \exp(x) - 2\exp(3x) = 1$$

Nota.-

1. Para resolver este tipo de problemas, usualmente tomamos logaritmo de cada lado y luego usamos las fórmulas de Logaritmos para “bajar x ” del exponente.
2. Como el rango de la función exponencial $f(x) = b^x$ es $\langle 0; \infty \rangle$, se tiene que b^x siempre es positivo.

Teorema

Sea $b > 0$ y $b \neq 1$, $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$

Ejemplo

Resolver $16^x - 2(4^x) - 3 = 0$

Solución.-

$$(4^x)^2 - 2 \cdot 4^x - 3 = 0$$

factorizando por aspa simple obtendremos

$$(4^x + 1)(4^x - 3) = 0$$

de donde $4^x = -1$ v $4^x = 3$

es decir, solo hay una solución

$$x = \log_4 3 \quad \text{¿Esta solución es positiva o negativa?}$$

por lo que

$$\text{C. S.} = \{\log_4 3\}$$

Ejercicio.

Indique el número de soluciones reales de:

- a) $\log(x) + x^2 - 2 = 0$
- b) $\log(|x|) + x^2 - 2 = 0$
- c) $e^x + x^2 - 2 = 0$

Respuesta:

- a) 1
- b) 2
- c) 2

Ecuación logarítmica

Es aquella ecuación donde la incógnita se encuentra afectada por el logaritmo.

Ejemplos

$$1) \log x + \log(x + 1) = 0$$

$$2) \ln x - 2 = 0$$

$$3) \log_2 x - x = 0$$

Teorema

Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $b > 0$, $b \neq 1$:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$$

Ejemplo

Resolver $\log x^2 - \log(-2x + 8) = 0$

Solución.-

- De los logaritmos tenemos que $x^2 > 0$ y $-2x + 8 > 0$, de donde al intersectar obtenemos $x \in \langle -\infty; 4 \rangle \setminus \{0\}$
- Al operar la ecuación:

$$\log(x^2) = \log(-2x + 8)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

De donde $x = -4$ v $x = 2$ como ambos cumplen con ser menores a 4, tendremos que C.S = $\{-4; 2\}$

Inecuación exponencial

Es aquella inecuación donde la variable se encuentra en el exponente.

Ejemplos

$$1) 2^x + 3^x \leq 5$$

$$2) e^x - 2 > 0$$

$$3) \exp(x) - 2\exp(3x) \leq 1$$

Teorema

Siendo $x, y \in \mathbb{R}$ obtendremos que:

$$1) \forall b > 1: \quad b^x < b^y \Leftrightarrow x < y$$

$$2) \forall 0 < b < 1: \quad b^x < b^y \Leftrightarrow x > y$$

Las propiedades anteriores también son ciertas cuando es una desigualdad no estricta.

Ejemplo

Resuelva la inecuación $2^{x^2-|x|} \geq 64$

Resolución: La inecuación es equivalente a

$$2^{|x|^2-|x|} \geq 64$$

Como la base es mayor a uno tendremos:

$$|x|^2 - |x| \geq 6$$

$$|x|^2 - |x| - 6 \geq 0$$

$$(|x| - 3)(|x| + 2) \geq 0$$

$$|x| - 3 \geq 0$$

$$x \leq -3 \vee 3 \leq x$$

Luego C.S = $< -\infty; -3] \cup [3; \infty >$

Ejercicio.

Indique el número de soluciones enteras de la ecuación

$$(2^x - x)(x^2 - 3x - 10) < 0$$

Respuesta: 6

Inecuación logarítmica

Es aquella inecuación donde la variable se encuentra afectada por el logaritmo.

Ejemplos

$$1) \log x + \log(x + 1) \leq 0$$

$$2) \ln x - 2 > 0$$

Teorema

Siendo $x, y \in \mathbb{R}^+$ tendremos que:

$$1) \forall b > 1: \log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x < y$$

$$2) \forall 0 < b < 1: \log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x > y$$

Las relaciones anteriores también se cumplen si es una desigualdad no estricta.

Ejemplo

Halle el conjunto solución de la inecuación $\log x^2 - \log(-2x + 3) < 0$

Solución.-

- De la definición del logaritmo obtenemos: CVA = $\langle -\infty; 3/2 \rangle \setminus \{0\}$
- Operando la inecuación:

$$\log x^2 < \log(-2x + 3)$$

$$x^2 < -2x + 3$$

$$(x - 1)(x + 3) < 0$$

$$x \in \langle -3; 1 \rangle$$

Intersectando con el CVA obtenemos $x \in \langle -3; 1 \rangle \setminus \{0\}$

Ejercicios

1.- Resolver $\log(4 - x) (\sqrt{x - 1} + 1) \geq 0$

2.- El número V de computadoras infectadas por un virus aumenta de acuerdo con el modelo $V(t) = 100e^{4.6052t}$, donde t es el tiempo en horas. Encuentre el número de computadoras infectadas después de 1 horas. ¿Luego de que tiempo habrá al menos 100000 computadoras infectadas?

3.- La tabla de valores se obtuvo al evaluar una función. Determine cuál de los enunciados puede ser verdadero y cuál debe ser falso referente a los pares ordenados que se indican.

x	y
1	0
2	1
8	3

- a) y es una función exponencial de x .
- b) y es una función logarítmica de x .
- c) x es una función exponencial de y .
- d) y es una función lineal de x .